



TITLE:

インバラン系における超流動：ト
ラップ中の中性原子系で観測され
たフェルミ凝縮体(<シリーズ>超伝
導・超流動研究の接点)

AUTHOR(S):

手塚, 真樹

CITATION:

手塚, 真樹. インバラン系における超流動：トラップ中の中性原子系
で観測されたフェルミ凝縮体(<シリーズ>超伝導・超流動研究の接点).
物性研究 2010, 95(1): 34-55

ISSUE DATE:

2010-10-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169375>

RIGHT:

インバランス系における超流動

— トラップ中の中性原子系で観測されたフェルミ凝縮体 —

京都大学 大学院理学研究科 手塚 真樹¹

(2010 年 8 月 20 日受理)

目次

1	イントロダクション	35
1.1	粒子数インバランスのある冷却原子系の超流動に関する実験研究の経緯	35
1.2	均一な粒子数バランス系の理論研究	38
1.3	粒子数インバランス系の理論研究	39
1.3.1	トラップの効果	40
1.4	質量インバランス系	40
1.5	1次元系	41
1.6	最近の実験の動向	42
2	3次元粒子数インバランス系の平衡状態	42
2.1	正常相の相互作用を取り込んだ平均場理論による解析	42
2.1.1	発散の扱い	43
2.1.2	Hartree 項を導入したときのパラメータの制限	44
2.2	数値計算	45
2.2.1	球形トラップの場合	45
2.2.2	葉巻型トラップの場合	45
2.3	実空間自己無撞着 T 行列近似	48
2.4	3次元トラップに対する結果のまとめ	50
2.4.1	最近の実験との対応	50
3	まとめ	50

¹E-mail: tezuka@scphys.kyoto-u.ac.jp

1 イントロダクション

1.1 粒子数インバランスのある冷却原子系の超流動に関する実験研究の経緯

中性原子の気体をレーザーにより減速して真空中に捕獲し ($10^{10} - 10^{15} \text{cm}^{-3}$ 程度)、蒸発冷却により極低温 ($10^{-10} - 10^{-6} \text{K}$ 程度) に冷却した系で、多様な実験が行われている。この系の顕著な特徴として、原子が感じる閉じ込めポテンシャルの形状をレーザーや磁場により原子種ごとに制御できること、Feshbach 共鳴を利用して磁場中で実効的な原子間相互作用を調節できることが挙げられる。

中性原子は、構成する核子と電子の個数の合計、すなわち質量数と原子番号の和の偶奇により、ボソンまたはフェルミオンとなる。ボソン原子系では 1995 年にボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] が実現された。多数の原子の相互作用を調節することにより、BEC をはじめとして、量子多体系のさまざまな物理が調べられる (レビューとして [7, 8] を挙げる)。フェルミオン原子は核子数または電子数が奇数なので、必ず核スピンまたは電子スピンの内部自由度を持つ。本稿で扱うフェルミオン原子系の超流動の実験は、これまでアルカリ原子系で行われてきた。 ^6Li では核スピンが $1+$ 、 ^{40}K ²では核スピンが $4-$ なので、それぞれ、6 個、10 個の超微細準位がある³。

中性原子間のファン・デル・ワールス相互作用の到達距離は数 nm 程度である。低温では原子間の相対運動量が小さいため、相互作用は多くの場合 s 波散乱長 a_s で特徴づけられる⁴。同じ準位間の s 波散乱は粒子交換に対する波動関数の反対称性から禁止されるが、異なる準位間の散乱は許される。2 個の超微細準位を同時に閉じ込めた系はスピン $1/2$ の系とみなすことができる。

2 個の超微細準位にある ^{40}K をほぼ等しい個数捕獲した系では、JILA のグループにより、Feshbach 共鳴近傍の磁場で a_s を調節した実験が行われ、2003 年に $a_s > 0$ の系で弱く束縛された 2 原子分子の BEC が [10]、翌年には 2 原子の束縛状態がない $a_s < 0$ の系でのフェルミ凝縮体が [11] 実現された。MIT のグループでも ^6Li のフェルミ凝縮体の実現され、回転させると量子化された渦が、ボソン原子系の BEC の場合 [12] と同様に観測されることから、超流動を示すことが確かめられた [13]。

2005 年末、MIT [14, 15, 16] と Rice [17, 18, 19, 20] の 2 つのグループにより、それぞれ、トラップ中の ^6Li 原子の 2 つの超微細準位の粒子数に差のある (インバランス) 系で、フェルミオン原子の凝縮体の実現された。2009 年には ENS [21, 22] のグループも同様の系で凝縮体を生成した。実験は一軸方向 (以下、 \hat{z} 方向とする) に長い (閉じ込めの弱い) トラップポテンシャル中で行われてきた。トラップはガウシアンビーム型のレーザー光と弱い磁場変化の組み合わせで作られ、ほぼ調和型ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}) = \omega_{\perp}^2 r^2 + \omega_z^2 z^2, r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}, \mathbf{r} \equiv (x, y, z) \quad (1)$$

²不安定核だが長寿命のため天然に存在し、実験中の崩壊は無視できる。

³その他のアルカリ元素の既知のフェルミオンの同位体の寿命は数年以内である。アルカリ土類やランタノイド元素のフェルミオンの安定同位体を冷却する実験も行われている。

⁴p 波や d 波の Feshbach 共鳴も調べられており、これらの近傍では s 波以外の成分が無視できない。

と近似される。

真空中にトラップされた冷却原子系では、トラップを瞬間的に切り、初期の運動量に従って運動する原子の一定時間後の分布から運動量分布を求める time-of-flight (TOF) の実験とともに、原子集団の密度を光の吸収あるいは位相変化でその場 (*in-situ*) で観測する実験も行われている。ここで、光は原子集団を一方向に透過するので、光が \hat{y} 方向に進むとすると、密度 $n(\mathbf{r}) = n(x, y, z)$ の y 方向への線積分

$$n_{\text{column}}(x, z) \equiv \int n(x, y, z) dy \quad (2)$$

が得られる⁵。もし、系が z 軸に関して回転対称 ($n(\mathbf{r}) = n(r, z) = n(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$) ならば

$$n_{\text{column}}(x, z) = \int n(\sqrt{x^2 + y^2}, z) dy = 2 \int_x^\infty \frac{rn(r, z)}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr \quad (3)$$

なので、 $I(x, z)$ を逆 Abel 変換することで $n(r, z)$ が求まる。なお、実際の測定には誤差が含まれ、分布が滑らかであっても、観測される面密度は必ずしも滑らかにはならない。実験では、面に投影した密度分布を、さらに軸方向に投影して線密度

$$n_{\text{axial}}(z) \equiv \int n_{\text{column}}(x, z) = \iint n(x, y, z) dx dy \quad (4)$$

を得ることも行われている。

温度は、多数成分の分布の外縁部では相互作用が無視でき、自由粒子の分布が実現することを利用して [16, 21]、等密度系の局所密度近似 (後述) を仮定したときの有限温度の分布との対応によって [18]、あるいは ^6Li と弱く相互作用するボソンである ^7Li を少量添加し、その熱分布を観測することによって [22] 決定され、いずれの実験とも、最低温度は $0.05 T_F$ 程度以下と見積もられている。

インバランスの度合いは、2成分 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ の粒子数を $N_\uparrow, N_\downarrow (\leq N_\uparrow)$ とするとき、

$$P \equiv \frac{N_\uparrow - N_\downarrow}{N_\uparrow + N_\downarrow} \quad (5)$$

で表される。とくに、バランス系 ($N_\uparrow = N_\downarrow$) では $P = 0$ 、完全に偏極した系では $P = 1$ である⁶。凝縮体の形成される P に上限があるとき、この値 P_{CC} を Chandrasekhar-Clogston (CC) [23, 24] limit と呼ぶことにする。

MIT の実験では凝縮体を軸まわりに回転させると、軸に平行な方向からの観測により、 $P \lesssim 0.7$ のときに限り、両成分の原子密度について量子渦の三角格子が見られた。これにより、インバランス系でも凝縮体が超流動を示すことがわかった [14]。軸に垂直な光により、軸に平行な平面に投影した面密度分布は、多数成分、少数成分ともに軸方向と半径方向のアスペクト比がトラップのものとはほぼ等しく、両成分の密度差は同心楕円状の分布を示した [15]。特に、 $P \leq P_{\text{CC}} \sim 0.77$ のとき、投影領域の中央部の楕円形の領域で密度差の面密度がほぼ一定となり、Abel 逆変換によ

⁵吸光あるいは位相のずれの総量が、原子の視線上の密度の積分値に線形な範囲での観測を仮定している。

⁶多数成分は少数成分の $(1 + P)/(1 - P)$ 倍存在することになる。

れば密度差がほぼ 0 となった。密度差は $P > P_{CC}$ で急速に増加したので、ここで凝縮体が消失しているものと結論された。

Rice の実験では、面密度分布において、 $P \geq P_c \simeq 0.09$ のとき、多数成分に比べて少数成分のアスペクト比が小さくなった [17]。線密度 $n_{\text{axial}}(z)$ については、 $P \geq P_c$ のとき、密度差は z についてトラップ中央の両側で 2 つのピークを持ち、この外側ではほぼ多数成分のみが見られることから、外側に多数成分のみのフェルミ原子気体、内側に両成分の密度がほぼ等しい凝縮体という相分離が起きていると結論された。

表 1 に、両実験および ENS の実験の比較を示す。Feshbach 共鳴点において、凝縮体を実現する P の上限 P_{CC} は、MIT では 0.77 程度、ENS でも 0.76 程度であったが、Rice の実験では P が 0.95 – 0.99 程度になっても凝縮体が観測され、 P_{CC} は見られないこと、Rice の実験では少数成分の分布のアスペクト比がトラップに比べて小さく、分布が球に近づく現象が見られているが、他の実験では両成分の分布がトラップの形状にほぼ従っていることが顕著な違いである。

	MIT [14, 15, 16]	Rice [17, 18]	ENS [21, 22]
粒子数	$(1 - 2) \times 10^7$	$(1 - 4) \times 10^5$	10^5
トラップ周波数	$(2\pi)((115 - 130) \times 23) \text{ Hz}$	$(2\pi)((325 - 350) \times 7.2) \text{ Hz}$	$(420 \times 18.6) \text{ Hz}$
アスペクト比	5	45-49	22
蒸発冷却の時間	“over several seconds”	750 ms	6 s
粒子分布の変形	微小	50% 以上	微小
CC limit P_{CC}	$\sim 77\%$ [14]	$> 95\%$	76(3)%

表 1: 粒子数インバランス系で凝縮体を生成した実験の比較

冷却原子系の実験においては、空間的に変化するポテンシャル $V(\mathbf{r})$ によって、通常、高々数 mm 程度の領域に、平均原子間距離が 100 nm から数 μm 程度の原子集団を捕獲する。トラップポテンシャルの効果について考える⁷。

平衡状態では、各成分 σ の化学ポテンシャル μ_σ が定義できる。まず、 $V(\mathbf{r})$ の変化する長さスケールが、原子の平均自由行程および、実現する相の相関長などの典型的な長さスケールに比べて充分長い場合には、相境界のごく近傍を除いて、各点 \mathbf{r} において局所的な相が定義でき、その相は、各成分の化学ポテンシャルが $\mu'_\sigma \equiv \mu_\sigma - V(\mathbf{r})$ の、一様系 (全空間で $V'(\mathbf{r}) = 0$ の系) のものに一致すると期待される⁸。ここでは、このように各点での状態が局所的な $\{\mu'_\sigma\}$ で決まるとする近似を局所密度近似 (local density approximation; LDA) と呼ぶ。LDA が良い近似のとき、 $V(\mathbf{r})$ が等しい等ポテンシャル面の上では、各成分の密度などの物理量が等しい。1 回の実験で多くの $\{\mu'_\sigma\}$ に対する相の情報が得られる。化学ポテンシャル差を変えて実験を繰り返すことで、一様系の相図を描くことができる。

MIT のグループは LDA を仮定して、温度 $T/T_{F\uparrow}$ を縦軸、 P を横軸にとった一様系の相図を

⁷光格子の場合は周期ポテンシャルを引いた残りの成分を考える。

⁸一様系で相分離が起きる可能性もある。

求めた [25]。

- $(T/T_{F\uparrow}, P) = (0.2, 0.07)$ 付近に 3 重臨界点があり、ここと $(T/T_{F\uparrow}, P) = (0, 0)$ および $(T/T_{F\uparrow}, P) = (0, 0.36)$ をそれぞれ結ぶ線の下では凝縮体と正常状態の相分離が起きる、
- この領域の外、3 重臨界点と $(T/T_{F\uparrow}, P) = (0.15, 0)$ を結ぶ線の下では凝縮体、
- 残りの部分では正常状態、

という結論となっている。

P が 1 に極めて近いとき、少数成分は、フェルミ面を形成する多数成分の原子集団の不純物と見ることができる [26]。これらの少数成分の原子は多数成分の原子集団と相互作用する。ラジオ波 (rf) 分光により、(角度分解) 光電子分解に相当する、原子のエネルギースペクトルが得られている。MIT のグループでは、凝縮体内外での両成分のスペクトルピークの位置 [27] や、 $(k_F a_s)^{-1} \gtrsim 1$ での 2 原子分子状態からユニタリティー近傍でのポーラロン状態に移行する過程 [28] が測定された。ポーラロンのエネルギーは局所的な多数成分の密度に対応するフェルミエネルギーの $-0.64(7)$ 倍と求められた。

1.2 均一な粒子数バランス系の理論研究

空間的に均一な等質量 2 成分フェルミオン原子系で、相互作用の到達距離 r_0 が平均原子間隔 d_0 および s 波散乱長 a_s に比べて充分短く ($r_0 \ll d_0, a_s$)、かつ p 波以上の共鳴の効果も無視できる場合を考える⁹。両成分の化学ポテンシャルが等しいとき、原子種によらず、系の性質は 1 個の無次元のパラメータ $k_F a_s$ で決まる。アルカリ金属原子系では、Feshbach 共鳴点近傍で、磁場により $1/(k_F a_s)$ を連続的に変化させる実験が行われてきた。

フェルミオン冷却原子系全般に関する近年のレビューとして [29] を挙げる。

$T = 0$ において、 $1/(k_F a_s) \rightarrow -\infty$ の極限では BCS 的な超流動、 $1/(k_F a_s) \rightarrow +\infty$ の極限では、2 原子が強く結合した分子ボソンの BEC 的な超流動が期待される。これらの間で何が起きるかについては 1980 年代より多くの理論研究がある [30, 31, 32, 33]。有限温度でも両超流動相の間に相転移はなく、運動量空間でペアを組み、実空間で重なり合ったクーパー対が次第に小さくなり、分子を形成するという BCS-BEC クロスオーバーが実現されると広く考えられてきた。凝縮体成分の割合や比熱などが温度の関数として調べられてきている。

とくに、Feshbach 共鳴点で $1/(k_F a_s) \rightarrow 0$ となると、粒子あたりのエネルギーや超流動の転移温度のような量は、それぞれ E_F や T_F などスケールされる。この、ユニバーサルな物理が実現する点はユニタリティー極限と呼ばれ、次元性の効果も含め、多くの理論研究がある [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]。

⁹希薄な原子気体を考えているので、フェルミ速度は常に非相対論的である。 $(3/2)k_B \times (1 \mu\text{K})$ の運動エネルギーを持つ ^6Li 原子の速度は 64.4 mm/s 。

1.3 粒子数インバランス系の理論研究

本稿の主題である、ユニタリティー極限近傍の強相関領域で、2成分の粒子数が異なる場合についてのこれまでの理論研究について述べる。

超伝導の BCS 理論以後、磁場による超伝導の破壊の機構が研究されるに伴って、2つのスピン状態の粒子数が等しくない系での超伝導の可能性も提案されてきた。クーパー対の形成と凝縮が磁場中で阻害される要因としては、主に、準粒子生成によるゼーマンエネルギーの利得がギャップエネルギー程度になることによるパウリ型の対破壊 [23, 24] と、第2種超伝導体中に貫入した磁束量子を回る超伝導電流の運動エネルギーが凝縮によるエネルギーの利得と同程度になる軌道効果 [41] とが考えられる [42]。

粒子数インバランスのある冷却フェルミオン原子系を準備するとき、スピンを反転するプロセスは無視できるので、パウリ型の対破壊に対応する現象はない。また、回転系でない限り、量子化された回転が凝縮体に貫入するようなプロセスも存在せず、軌道効果に対応する対破壊もない。したがって、この系の低温での相図を調べることで、パウリ型の対破壊や軌道効果がないときに、粒子数インバランスのあるフェルミオン系の基底状態がどうなるかを調べられることになる。

粒子数インバランスがある場合の凝縮状態として、両成分のフェルミ運動量 $k_{F,\uparrow}$, $k_{F,\downarrow}$ の差に対応する運動量を持つペアが凝縮する Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 状態 [43, 44]¹⁰ や少数成分のフェルミ波数での BCS 的な対形成が起き、より大きな波数を持つ多数成分は正常状態に留まるという波数空間での相分離状態である Sarma [45] あるいは breached pair [46] 状態、両成分のフェルミ面が変形し、重なった波数でペアを組む変形フェルミ面状態 [47, 48] といった状態が提案されてきた。

ここで、Fulde-Ferrell (FF) 状態 [43] では1つの運動量 \mathbf{q} ($q \equiv |\mathbf{q}| = k_{F,\uparrow} - k_{F,\downarrow}$) を持つペアのみが凝縮し、ペア振幅は $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar)$ のように一定の絶対値を持って位相が空間的に振動する。一方、Larkin-Ovchinnikov (LO) 状態 [44] では $\pm\mathbf{q}$ を持つペアがともに凝縮し、ペア振幅は実数のまま符号が周期的に変化し、 $\hbar/(2q)$ ごとに $\Delta(\mathbf{q}) = 0$ となる平面を持つ。このとき、密度差はこの平面で極大となる、周期 $\hbar/(2q)$ の振動¹¹を示すことが示されている [49]。

FFLO 状態の可能性の指摘されている超伝導体としては CeCoIn_5 [50, 51, 52], $(\text{TMTSF})_2\text{ClO}_4$ [53], $\lambda-(\text{BETS})_2\text{FeCl}_4$ [54], UPd_2Al_3 [55], $\text{RuSr}_2\text{GdCu}_2\text{O}_8$ [56, 57, 58], $\kappa-(\text{BEDT-TTF})_2\text{Cu}(\text{NCS})_2$ [59] などがある。

冷却フェルミオン原子系の文脈でも、FFLO 状態の超流動が予測され [60, 61]、ユニタリティー近傍で相分離の有無が議論される [62, 63] など、実験での凝縮体の実現と相の特定への期待が高まっていた時期に、MIT, Rice 両グループによる実験の結果が発表され、活発な議論の対象となってきた。

¹⁰LOFF(ロフ) 状態とも略される。

¹¹波数 $2q/\hbar$ のコサインカーブに近いが、より正確な近似としては高次の振動成分を含む楕円関数で表される。

1.3.1 トラップの効果

Sheehy と Radzihofsky [64, 65] は Feshbach 共鳴の近傍で、分子状態を含む 2 チャンネル理論により、平均場の範囲で、共鳴点からのずれと P に関する相図を求めた。彼らは、BCS 側で、凝縮体を含む相分離領域と正常相との間に狭い FFLO 状態が現れるとした。LDA の範囲で、軸密度および軸方向の原子集団の広がりの実験との対応も議論されたが、面密度やアスペクト比については議論されていなかった。

Stoof らは 3 次元冷却原子系のユニタリティー近傍で平均場および相図を求めた [66, 67, 68]。とくに極端に偏極したポテンシャルについては、LDA が良い近似かどうかは自明でない。実際、Rice の実験では、粒子分布が明らかに等ポテンシャル面とずれており、LDA は成り立っていない。

[66] では平均場による均一系の相図をもとに、MIT の実験では高温で相分離のない Sarma 相が見られており、Rice の実験は低温で相分離により $P \sim 1$ でも凝縮体となっているという可能性が提案された。

Haque と Stoof [69] は、凝縮体と外側の正常状態の間に表面張力が働き、それにより Rice 実験の変形が再現できるとした。しかし、Rice の実験を再現するには、MIT で相分離が起きるならば大きな変形が起きるということになる。これは、相分離は起きているが変形は見られないという MIT のその後の実験結果に合わない [25]。[70, 71] も現象論的に表面張力の効果を議論しているが、いずれも、両実験、特に P_{CC} の有無を説明するには至っていない。

一方で、細長いトラップで蒸発冷却を行う過程では、温度が一様でない非平衡な状態が実現し、 P が大きい場合でもトラップ中央において局所的なインバランスが小さくなるとともに温度が下がって凝縮体が生成する [72, 73, 74] という機構も提案されているが、平衡状態でトラップの効果がどの程度かは明らかにされていなかった。

Bogoliubov-de Gennes 方程式による研究 [61, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82] については次章冒頭で述べる。

葉巻型以外のトラップについては、パンケーキ状の (1 軸方向につぶれた) トラップの中央部のポテンシャルを高くすることで作られる、ドーナツ状のトラップにおいて、ギャップ関数のノードの向きの異なる 2 種類の FFLO 状態が生成される可能性が指摘されている [83]。

1.4 質量インバランス系

${}^6\text{Li}$ と ${}^{40}\text{K}$ のように、質量の異なる 2 種類のフェルミオンを任意の個数比で閉じ込めた系も考えることができる [84, 85, 86]。このような系は質量の異なるクォークをフェルミオンとする QCD の系との関連でも注目されている。[87] では Sarma 相や相分離、FFLO 相の可能性が、[88] では breached pair 状態が安定となる条件が調べられた。質量インバランスのある系に対する、冷却原子系の文脈での一様系の相図としては [89, 90, 91] などがある。[89] では 2 次元のトラップ中の粒子数インバランスのある系で、一様系に対する Ginzburg-Landau 理論による相図を LDA と組み合わせることにより、質量差がある場合に FFLO 状態の領域が広がるとの結論が得られている。

[90, 91] では等質量系の場合と異なり、 ^{40}K が多い側に Lifshitz 点を持つ相図が予測されている。

1.5 1次元系

z 方向に長い調和振動子トラップ (1) において、 z と垂直な方向の閉じ込めが強く、フェルミエネルギーが半径方向のトラップの第 1 励起状態のエネルギーより充分小さい場合 ($k_B T \ll (3/2)\hbar\omega_\perp - E_F$ かつ $E_F - (1/2)\hbar\omega_\perp \ll \hbar\omega_\perp$) を考える。このとき、系は 1 次元的になる。

擬 1 次元系の超伝導ではボソン化 [92] に基づく解析により、FFLO の強められる可能性が指摘されてきた [93]。著者らは、調和振動子トラップがある 1 次元系での凝縮状態と原子分布を予測することを目的に密度行列繰り込み群 (DMRG) による研究を行った [94, 95]。

1 次元の短距離相互作用するフェルミオン系では、空間の離散化が有効である。低フィリングの引力ハバード模型を用い、DMRG により、調和振動子ポテンシャルのある場合の基底状態での各成分の密度分布と、2 体ペア相関関数を計算した。2 体波動関数に集積したペアの個数を与える、2 体密度行列 (2BDM) の固有値分布も求めた。1 次元系中で引力相互作用する 2 種の原子について、ペア相関関数と密度差分布はそれぞれ LO 状態で期待される周期で空間的に振動することがわかった。偏極度が 0.2 程度を超えると、中央に (擬) 凝縮体、両端に多数成分のみという相分離が必ず起きることがわかった。さらに、2BDM の固有値分布から、 P が 80% を超えても、少数成分の原子のほとんどが凝縮に寄与していると考えられる。

DMRG による研究としては、他に [96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103]、Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式によるものとしては [104, 105]、量子モンテカルロ法によるものとしては [106, 107, 108] が挙げられる。一様系の Gaudin-Yang モデル [109, 110] の解 [111, 112, 113] をスピン依存性を取り込んだ LDA と組み合わせた研究としては、引力系について [114, 115, 116, 117, 118]、斥力系に対しては [96, 119] が挙げられる。引力系についての研究は連続系、光格子系ともに、1 次元の 2 成分インバランス系では LO 的な密度差のある (擬) 凝縮体が中央に生成され、外側は全体の P に応じて、両成分が等密度となるか、多数成分のみの正常状態となるかであるという点で一致している。

BCS-BEC クロスオーバーに対応して、インバランス系では、斥力側で \uparrow と \downarrow 1 原子ずつからなる分子が形成され、ボソン分子と余剰の \uparrow 原子からなるボース・フェルミ混合系となる。1 次元系における FFLO 状態とボース・フェルミ混合系の移り変わりの詳細も、原子の 3 体問題として [120]、また、1 次元の光格子中の多体問題として [102] 調べられてきている。

スピン成分によりトラップの形状が異なる場合を調べた理論研究には [121, 122] がある。[121] では光格子における breached pairing の可能性が調べられた。

以上で挙げた以外に、関連する研究として、光格子でホッピングに原子の相関が影響する場合 [123]、2 本鎖格子系 [124]、2 次元の光格子系 [125]、2 種類以上の原子が異なる次元性を持つトラップに捕獲された系での超流動やエフィモフ状態 [39, 126] の研究を挙げる。フェルミオン原子の光格子系一般に関する最近のレビューとして [127] がある。

1.6 最近の実験の動向

ENS のグループは、Rice と原子数, アスペクト比の近い条件のトラップを作成し、蒸発冷却に 10 倍程度の時間を掛けたところ、 P_{CC} の値および原子集団の変形の有無について、MIT と近い結果を得た。

MIT の Zwierlein らは、擬 1 次元的なトラップに同数の \uparrow, \downarrow 状態の粒子を閉じ込め、当初、トラップ軸方向の磁場勾配による Zeeman エネルギーの差によって \uparrow と \downarrow の感じるポテンシャルの極小点をトラップの左右に分離しておいた系で、急に磁場を一様にしたときのダイナミクスを観測した [128]。このとき、ユニタリティー極限の近傍ほど、両成分の混合が遅くなることが観測された。彼らは測定からスピンの拡散係数 D を求めた。ユニタリティー極限で $D \simeq \hbar/m$ の極小値をとるとしている [128]。

Rice の Hulet らは、2 方向の光格子を交わらせることにより、周期的に配列した多数の擬 1 次元的なトラップ ($\lambda \simeq 10^3$) を生成した。全体で 2×10^5 個程度の、2 成分間に個数インバランスのある ^6Li 原子をトラップしたところ、擬 1 次元トラップ軸に垂直な方向について積分した線密度について、3 次元の場合と異なり、 $P \lesssim 0.07$ において、密度差がトラップ中央で大きく、外側でほぼ 0 になる振舞が見られた。 $P \gtrsim 0.07$ では、トラップの外側では多数成分のみが存在し、中央の少数成分の存在する領域で密度差が最大となった。中央の最も深いトラップにおいて、多数成分の原子数は 125 程度であった [129]。

2 3 次元粒子数インバランス系の平衡状態

ここでは、3 次元粒子数インバランス系の MIT と Rice の実験結果の差異に関連して、著者らが行った研究について説明する [130]。 P_{CC} の値や原子分布のアスペクト比のトラップ形状への依存性および、FFLO のような凝縮状態の有無を調べた。

2.1 正常相の相互作用を取り込んだ平均場理論による解析

著者らは、ボゴリウボフ・ドジェンヌ (BdG) 方程式を用いて、3 次元の葉巻型トラップ中における粒子数インバランスのあるフェルミオン系の強結合領域での振舞を調べた。 $k_B T / \mu_1 = 0.05$ 程度の低温での平衡状態について、アスペクト比 λ の増加とともに粒子分布の等ポテンシャル面からの変形が見られるが、Rice 実験ほど大きな変形とはならないこと、CC limit は λ の増加によって増えないことを明らかにした。

BdG 方程式を用いた 3 次元の粒子数インバランス系の研究には [61, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82] がある。その一部は、球対称 [75, 76, 78, 79, 81] または円筒形トラップ [77] を対象としている。調和振動子トラップを考え、インバランス系での超流動の実現前に発表された [61] では、アスペクト比 $\lambda = 1.67$ のとき、トラップ中央部で秩序変数 Δ が符号を変えるような LO 的な解が存在することが示された。

Sensarma ら [80] は、粒子数 $N(< 2.5 \times 10^3)$ およびインバランス $P(\leq 0.4)$ を変えてアスペクト比 $\lambda = 1, 2, 4$ のトラップで粒子分布を求めた。彼らの計算では、[61] と同様、ユニタリティー極限を扱う一方で、凝縮体外部での正常状態での原子間相互作用は無視されていた。[80] によれば、 $(N/\lambda)^{1/3}$ の大小が LDA の破れの度合いを決め、 $(N/\lambda)^{1/3}$ が 10 程度以上では、粒子分布が LDA から期待される、等ポテンシャル面に沿ったものに近づく。実際彼らの計算では、 2×10^3 粒子程度では、 $\lambda = 2$ で LDA の破れは小さく、 $\lambda = 4$ では大きな変形が見られた。しかし、Rice の実験では $(N/\lambda)^{1/3}$ が 10 を超えている ($N \sim 3 \times 10^5$, $\lambda \sim 50$ より $(N/\lambda)^{1/3} \sim 18$) にもかかわらず、LDA の大きな破れが見られるという問題があった。また、凝縮体が生成される P の上限も調べられていなかった。

化学ポテンシャル $(\mu_\uparrow, \mu_\downarrow)$ のとき、正常状態でも生じる相互作用を Hartree 項として取り込んだ BdG 方程式は、トラップ中の 1 体のハミルトニアンを \hat{H}_σ として、以下で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_\uparrow + W_\downarrow & \Delta \\ \Delta^* & -\hat{H}_\downarrow - W_\uparrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_q(\mathbf{r}) \\ v_q(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_q \begin{pmatrix} u_q(\mathbf{r}) \\ v_q(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ここで、 $\hat{H}_\sigma \equiv -\nabla^2/(2m) + V(\mathbf{r}) - \mu_\sigma$ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) である。また、 $W_\sigma(\mathbf{r})$ は 1 原子が他の成分から感じる相互作用の Hartree 項 $gn_\sigma(\mathbf{r})$ である。ここで、結合定数 g は a_s と $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ という関係にあり、引力系では負である。

ここで、 σ 成分の密度を $n_\sigma(\mathbf{r})$, \uparrow と \downarrow 状態の原子対のペア振幅を $\Delta(\mathbf{r})$ とした。これらは、上記の固有値問題を解いて与えられる固有値 ϵ_q と固有ベクトル $(u_q(\mathbf{r}), v_q(\mathbf{r}))$ から、

$$\begin{aligned} n_\uparrow(\mathbf{r}) &= \sum_q f(\epsilon_q) |u_q(\mathbf{r})|^2, n_\downarrow(\mathbf{r}) = \sum_q (1 - f(\epsilon_q)) |v_q(\mathbf{r})|^2, \\ \Delta(\mathbf{r}) &= g_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \sum_q f(\epsilon_q) u_q(\mathbf{r}) v_q^*(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (7)$$

のように与えられる。なお、 $f(\epsilon_q) \equiv (e^{\beta\epsilon_q} + 1)^{-1}$ はフェルミ分布関数 ($\beta \equiv (k_B T)^{-1}$) である。

以下では、 $m = \hbar = k_B = 1$ とする。また、トラップの角振動数の相乗平均は $\bar{\omega} \equiv \sqrt[3]{\omega_\perp^2 \omega_z} = \omega_\perp / \sqrt[3]{\lambda}$ となる。長さの単位を $\sqrt{\hbar/(m\bar{\omega})} = 1$ とする。このとき、 $V(\mathbf{r}) \leq V_0$ の領域の体積は $(4\pi/3)(2V_0)^{3/2}$ と、 λ によらない。また、エネルギーが V_c 以下の 1 粒子固有状態の個数も λ によらず、スピンあたりほぼ $V_c^3/6$ 個となる。

2.1.1 発散の扱い

BdG の理論は本来弱結合、すなわち BCS 極限に対応するものであったが、粒子数バランス系では分子状態の効果を考慮することにより BEC 極限でも適用できることが示され [131]、BCS-BEC クロスオーバー領域も BdG で調べられている [132]。著者らは、粒子数インバランス系に対して以下で説明する適切な結合定数の正規化を行えば、散乱長が負の領域では分子状態を考えなくても、Feshbach 共鳴近傍 ($-1 \lesssim 1/(k_F a_s) < 0$) に至るまで少なくとも定性的にはこの理論が適用できると仮定して計算を行った。

BdG 方程式において、 ϵ_q はエネルギーの次元を持ち、 u_q, v_q は連続空間における 1 粒子波動関数の形をしている。連続空間では、原理的に、無限個の対が存在し得る。これらは $\Delta(\mathbf{r})$ に紫外発散を引き起こす。 $\mu = \mu_\uparrow = \mu_\downarrow$ の場合には、Bulgac と Yu の方法 [133] により、エネルギーのカットオフ E_c を導入し、それより大きなエネルギーに対応する状態の寄与を LDA の範囲で取り込むことができる。 $\hat{H}_0 = -\nabla^2/(2m) + V - \mu$ に対する 1 体のグリーン関数 $G_\mu^0(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ (\mathbf{R} は重心、 \mathbf{r} は相対座標) の $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$ での発散の性質を使って、 Δ が正規化された。なお、 G_μ^0 の正則化された部分 $G_\mu^{0,\text{reg}}$ は、 E_c より大きなエネルギーの状態に対して LDA (Thomas-Fermi 近似) を適用することで近似的に計算できる。

位置に依存する有効結合定数 $g_{\text{eff}}(\mathbf{r})$ は、カットオフエネルギーに対応する \mathbf{r} での波数 $k_c(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{2(E_c - V(\mathbf{r}))}$ および化学ポテンシャルに対応する波数 (フェルミ波数) $k_F^0(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{2(\mu - V(\mathbf{r}))}$ と定義するとき、

$$\frac{1}{g_{\text{eff}}(\mathbf{r})} = \frac{1}{g} + \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_F^0(\mathbf{r})}{2} \ln \frac{k_c(\mathbf{r}) + k_F^0(\mathbf{r})}{k_c(\mathbf{r}) - k_F^0(\mathbf{r})} - k_c(\mathbf{r}) \right). \quad (8)$$

で与えられる。

Grasso と Urban [134] は、 $k_F^0(\mathbf{r})$ のかわりに、Hartree エネルギーを考慮して

$$\tilde{k}_F(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{2(\mu - V(\mathbf{r}) - W(\mathbf{r}))} \quad (9)$$

を用いた。ここで、 $W(\mathbf{r}) = W_{\uparrow,\downarrow}$ である。彼らによれば、その結果 E_c に関する収束が改善し、計算量が削減された。なお、LDA が破れている場合には、これで得られる $g_{\text{eff}}(\mathbf{r})$ も局所的なトランプポテンシャルの値 $V(\mathbf{r})$ だけでは決まらなくなる。

著者らは、この方法を $\mu_\uparrow \neq \mu_\downarrow$ の場合に拡張して適用した¹²。すなわち、 $G_\mu^{0,\text{reg}}$ を $(G_{\mu_\uparrow}^{0,\text{reg}} + G_{\mu_\downarrow}^{0,\text{reg}})/2$ と置き換えても、発散の除去が可能であることを示した。このとき、式 (8) は、 $W_\sigma(\mathbf{r}) = gn_\sigma(\mathbf{r})$, $\tilde{k}_{F\sigma}(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{2(\mu_\sigma - V(\mathbf{r}) - W_\sigma(\mathbf{r}))}$ を用いて、

$$\frac{1}{g_{\text{eff}}(\mathbf{r})} = \frac{1}{g} + \frac{1}{2\pi^2} \left(\sum_\sigma \frac{\tilde{k}_{F\sigma}}{4} \ln \frac{k_c + \tilde{k}_{F\sigma}}{k_c - \tilde{k}_{F\sigma}} - k_c \right), \quad (10)$$

と置き換えられる。

2.1.2 Hartree 項を導入したときのパラメータの制限

Hartree 項を導入しない BdG では P_{CC} がほとんど 1 になることが知られている¹³。2 成分が共存する正常状態でのエネルギー利得を計算に入れないと、凝縮によりエネルギーが下がることを過大評価することになる。

ユニタリティー極限 $(k_F a_s)^{-1} \rightarrow 0$ でも、正常状態での相互作用は本来発散しない。とくに、1 個の \downarrow 原子を、フェルミエネルギー $E_{F\uparrow}$ まで満たされた \uparrow 原子中に置いたときのエネルギーは、

¹²[75] では [134] と同じ正規化法を用いた旨の記述があるが、その詳細は与えられていない。

¹³正常相での多数成分と少数成分の相互作用を無視するので、少数成分が少しでも存在すれば、凝縮体を作ったほうがエネルギーを得る。

fixed-node diffusion Monte Carlo 法により $-(3/5)AE_{F\uparrow}$, $A = 0.97(2)$ と計算されている [26]. これは密度の積に比例する平均場のエネルギーとしては $-(9A\pi/20)(k_{F\uparrow}(\mathbf{r}))^{-1} \times 4\pi n_{\uparrow}(\mathbf{r})n_{\downarrow}(\mathbf{r})$ に対応する。ユニタリティー極限よりも BCS 側 ($a_s^{-1} < 0$) では、相互作用は弱くなるはずで、このようになる領域は $|k_{F\uparrow}(\mathbf{r})a_s| \leq |k_F(\mathbf{0})a_s| < 9A\pi/20 = 1.37$ という制限がつく。さらに、一様なバランス系で Hartree 項を導入すると、 $|k_F a_s| > 3\pi/4 = 2.36$ のときには、安定な自己無撞着解が存在しない。

なお、Hartree 項の導入以外の方法で正常相での相互作用を記述した試みとしては、球形のトラップにおいて BdG と Landau-Ginzburg 理論の比較および表面張力の評価を行った [81] がある。

2.2 数値計算

$k_B T = 0.05$ として、式 (6) および (7) を自己無撞着に解いた。3次元調和振動子ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ について1体の固有状態は Hermite 多項式と Laguerre 陪多項式を用いて解析的に求められる。トラップ $V(\mathbf{r})$ は z 軸に関する回転対称性と、 x - y 平面に関する反転対称性を持つので、平衡状態において、物理量がこれらの対称性を持つとしてよい。 u_q および v_q を1体の固有状態で展開して計算を行った。このとき、(6) は1体の固有状態の x - y 平面に関するパリティと z 軸周りの位相の変化数でブロック対角化される。さらに、1体の波動関数が1次元 (z 方向) と2次元 (x - y 平面) の調和振動子の固有関数の積で書けることを利用して、効率よく計算できる。

u_q, v_q の成分や a_s を全体として1個のベクトル \mathbf{v} とみなせば、自己無撞着方程式は $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ という形をしている。したがって、直前2回の反復結果 $\mathbf{v}_2 = F(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{v}_1 = F(\mathbf{v}_0)$ から自己無撞着方程式の解に近い次の試行ベクトルを決定する方法である、Steffensen の加速法が使える。

さまざまな $(\mu_{\uparrow}, \mu_{\downarrow})$ の値について、自己無撞着な解を求め、 $n_{\uparrow}(\mathbf{r})$, $n_{\downarrow}(\mathbf{r})$ および $\Delta(\mathbf{r})$ を計算し、粒子数 N とインバランスパラメータ P を得た。ここで、

$$N_{\sigma} \equiv \int d\mathbf{r} n_{\sigma}(\mathbf{r}) = \int dz \int d\mathbf{r} 2\pi r n_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

である。

2.2.1 球形トラップの場合

まず、図1に球対称なトラップ ($\lambda = 1$) での P_{CC} の原子数 N への依存性を示す。

相互作用の強さ $|k_{F\uparrow} a_s|$ を固定すると、 N の増加とともに、 P_{CC} は一定の値に近づく。ここで、 $N > 2 \times 10^4$ では P_{CC} のずれは高々 2% 程度に収まっており、粒子数が増えるに従って LDA が回復していると考えられる。 $|k_{F\uparrow} a_s| = 1.3$ の場合については $P_{CC} \simeq 0.70$ である。

2.2.2 葉巻型トラップの場合

図2に、 $\lambda = 5$ および $\lambda = 50$ についての、原子分布のアスペクト比および密度差の計算結果を示す。両成分について、軸方向と半径方向への原子集団の広がり比はほぼ λ に等しい。トラッ

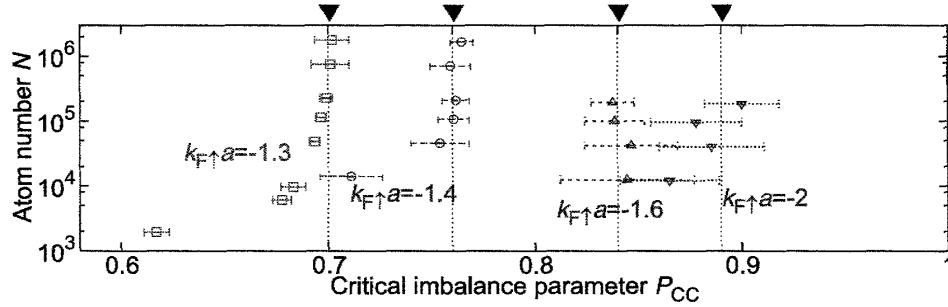


図 1: CC limit P_{CC} と球形トラップ中の原子数 N の関係をプロットした。データ点は、 μ_{\uparrow} の値ごとに μ_{\downarrow} を変化させ、 $\Delta(0)$ がほぼ消失する点としている。なお、 $\Delta(r)$ は、計算上、1 に近い P についても指数関数的に小さい有限の値をとるが、その P (あるいは μ_{\downarrow}) の関数としての振舞は、 P の増大 (μ_{\downarrow} の減少) とともに一旦急に減少し、その後ゆっくりと 0 に近づくものである。 P_{CC} は、 $\Delta(0)$ の値を μ_{\downarrow} の関数として急に減少する領域で外挿したものが 0 を切る点として求めた。

プの中央では、 P が小さいうちは密度差は見られないが、 P の増加とともに密度差が大きくなり、 $P > 0.71$ では極大となる。 $\lambda = 50$ では、密度差の分布はトラップ形状からややずれるが、 $P \geq 0.6$ ではこの変形は見られなくなる。

両スピンの原子の分布、密度差およびペア振幅として、凝縮が起きる場合の典型的なものを図 3 に示す。 $N = 3 \times 10^4$, $P = 0.45$ における結果である。トラップの中心軸を通る切断面での値をプロットした。ここで、縦軸 (r) 方向を横軸 (z) の λ 倍に拡大することで、等ポテンシャル面が円形になるようにしている。多数成分 (\uparrow) の分布は $\lambda = 5, 50$ とともに円形に近い。

$\lambda = 5$ においては、少数成分の分布や密度差もほぼ等ポテンシャル面に従う。ペア振幅は周縁部で符号の変化を示している。このような符号の変化は、LDA では見られないが、球形のトラップに対して BdG 方程式を解いた場合にも得られる [78] ものである。密度差が連続的に変化することから生じるものと考えられる。密度差は $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 近傍ではほぼ 0 となる。

$P > 0.7$ において、ペア振幅はほとんど消失する¹⁴。密度差は $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ で極大値を持つ。

以上の結果は MIT の結果と整合しており、LDA が (半径方向で見た際の、凝縮体周縁部のペア振幅の符号変化を除いて) 本質的にはほぼよく成り立っていることがわかる。

λ を 50 にすると、密度差の変形が見られる。すなわち、LDA は角度方向にも破れている。しかし、少数成分の分布のプロットがほぼ円形に留まることからわかるように、密度差の変化量は小さい。Rice の結果に見られるような、少数成分の分布の大規模な変形は再現されていない。ペア振幅が見られる領域の形状も、少数成分の分布とほぼ一致している。同じ原子数 $N = 3 \times 10^4$ について、LDA は $\lambda = 50$ で、 $\lambda = 5$ の場合より大きく破れることがわかった。LDA の破れは有限サイズ効果であり、アスペクト比が大きいほど、トラップの端の部分で有限サイズ効果が強調されるのは自然である。しかし、 $\lambda = 50$ の場合に、原子数が 1 桁近く多い Rice グループの実験

¹⁴BdG 方程式を反復的に自己無撞着に解く際、ペア振幅が全空間で 0 の初期状態から出発するとペア振幅は生じない。有限のペア振幅を持つさまざまな初期状態から始めて、上記の結果を確認した。

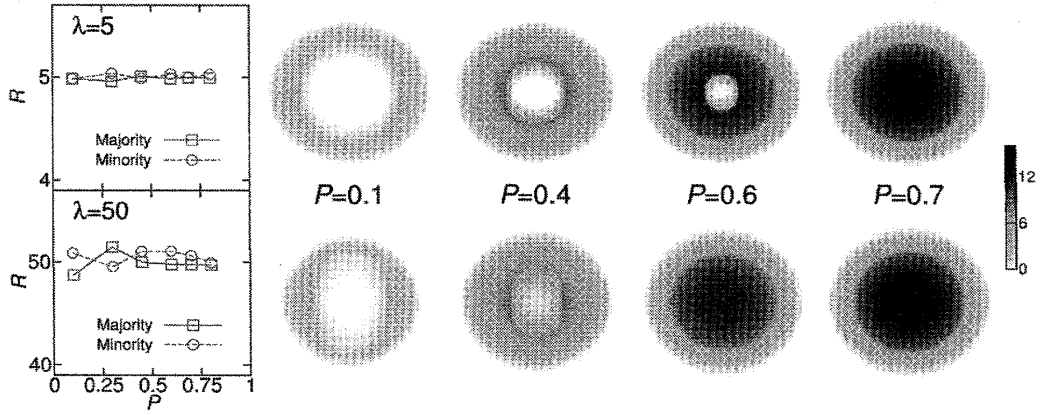


図 2: 左側のパネルに、軸方向と半径方向の原子分布の幅 (密度がピークの値の $1/20$ になるところで定義する) の比 R を P に対してプロットしたものを、右のパネルには異なる P に対する密度差のプロットを示す。上が $\lambda = 5$, 下が $\lambda = 50$ の場合のプロットであり、縦横の軸の比率を変えて、等ポテンシャル面が同じ円形になるようにしている。水平方向がトラップの軸 (z) 方向に対応する。 $k_F a_s = -1.3$, $N = 3.00 \times 10^4$ である。

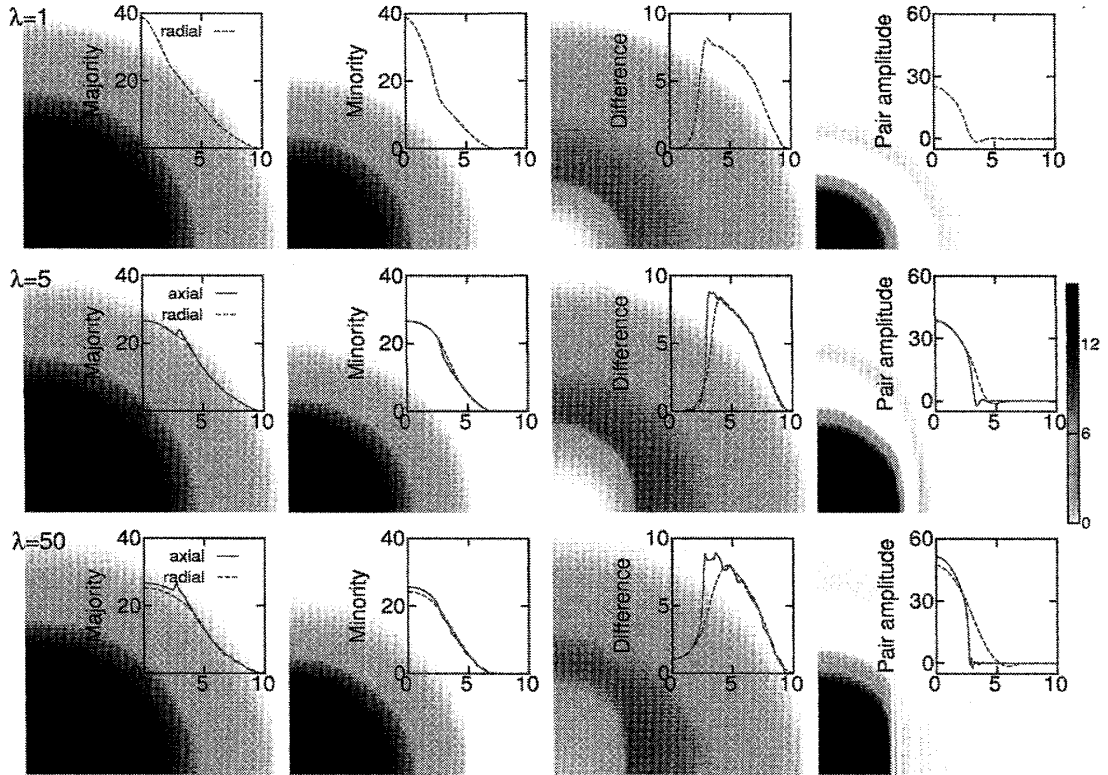


図 3: 多数成分と少数成分の密度、その差、ペア振幅を、上段 (a) $\lambda = 1$, 中段 (b) $\lambda = 5$, 下段 (c) $\lambda = 50$ について、左から順にプロットした。縦横の軸の比率を変えて、等ポテンシャル面が同じ円形になるようにしている。 $k_F a_s = -1.3$, $N = 3 \times 10^4$, $P = 0.45$ である。挿入図には軸上 ($r = 0$; 実線) および赤道面の半径上 ($z = 0$; 破線) についての各物理量を、それぞれ z および λr を横軸にとってプロットした。

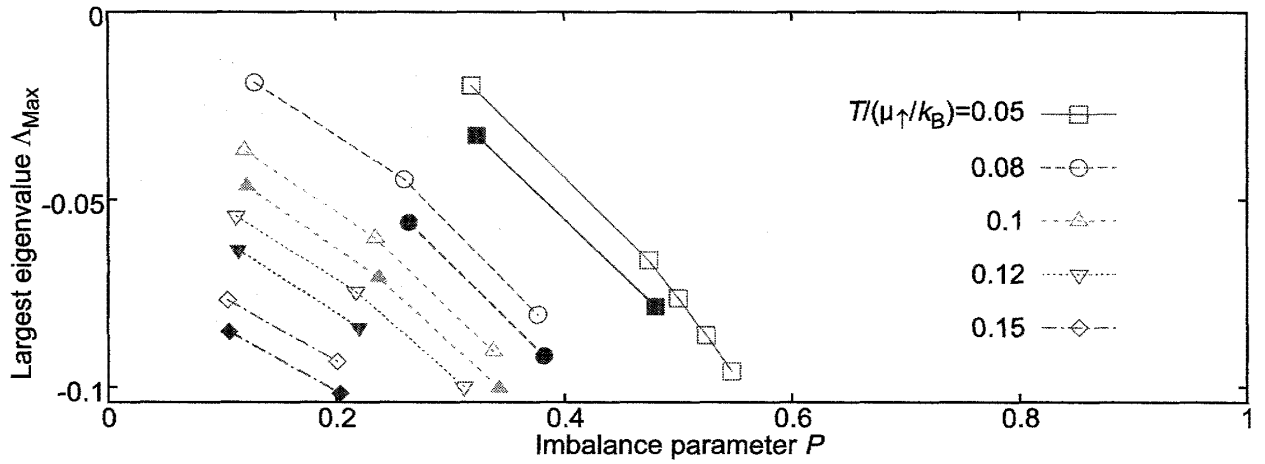


図 4: ペア感受率 χ_{SC} の最大固有値 Δ_{Max} をインバランス P の関数としてプロットした。 $\mu_{\uparrow} = 10\hbar\bar{\omega} = 10\hbar^3\sqrt{\omega_z\omega_r^2}$ に固定し、アスペクト比 $\lambda = 1$ (中が空のデータ点), 12 (中が埋まった点) および温度 $T/(\mu_{\uparrow}/k_B) = 0.05, 0.08, 0.1, 0.12, 0.15$ について示した。

ほどの変形が実現されていないことは、 P_{CC} に関する結果の相違とともに、Rice の実験が非平衡状態を観測している可能性を支持するものである。

2.3 実空間自己無撞着 T 行列近似

以上の BdG による解析では、数万粒子 (球形トラップでは 10^6 粒子程度) までの系について、平均場の範囲で Hartree 項を考慮した凝縮状態のシミュレーションを行ったが、

- 相互作用を Hartree 項で入れたため、 $|k_F a_s|$ の値に制限がつき、ユニタリティー極限が扱えない
- 平均場を超える揺らぎの効果が扱えない

という問題があった。多体効果を T 行列近似の範囲で自己無撞着に取り込み、ユニタリティー極限において、 λ の大きいトラップで P_{CC} が増大するかどうかを調べた。

実空間自己無撞着 T 行列近似 (RSTA) [135, 136] は、非一様なポテンシャル下の強相関フェルミオン系を低温で精度高く扱える手法であり、高温超伝導体の擬ギャップ相 [136] が再現できるほか、ボロンドープダイヤモンド超伝導体 [137] などにも適用されている。その有効性は、非摂動的な計算との比較によっても詳しく確かめられている [135]。

ユニタリティー極限 ($1/(k_F a_s) \rightarrow 0$) の正常状態¹⁵においては、RSTA のもとで、自己無撞着に解くべき式は以下ようになる。

$$\chi_{\text{SC}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = T \sum_n G_{\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) G_{\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', -\omega_n) - C(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (12)$$

$$\tilde{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [g^{-1} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \chi_{\text{SC}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]^{-1}, \quad (13)$$

$$\Sigma_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = T G_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, -\omega_n) \tilde{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (14)$$

$$G_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) = \left[[G_{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n)]^{-1} - \Sigma_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n) \right]^{-1}, \quad (15)$$

ここで、 $\chi_{\text{SC}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ はペア感受率、 $G_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n)$ 、 G_{σ}^0 は相互作用のある系および自由粒子の系の 1 粒子グリーン関数、 $\Sigma_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n)$ は自己エネルギー、 $\omega_n = (2n+1)\pi/T$ は (正負それぞれ N_c 個の) 松原 (角) 周波数 ($n = -N_c, -N_c+1, \dots, N_c-1$; $\omega_c \equiv 2N_c\pi/T$)、 $C(\mathbf{r})$ はカットオフエネルギー E_{Max} および松原周波数のカットオフ ω_c を用いて、各点で

$$C(\mathbf{r}; \omega_c; E_{\text{Max}}) = \pi^{-3} \int_0^{\sqrt{2(E_{\text{Max}} - V(\mathbf{r}))}} \frac{2\omega_c}{k^2} dk. \quad (16)$$

のように求められる正規化因子である。

回転対称性を用い、角度方向についてはフーリエ展開して計算した。 $\mu_{\uparrow} = 10$, $E_{\text{Max}} \sim 30$, $\lambda = 1$ あるいは 12 としたとき、収束には典型的に $N_c \sim 15$ 個の (正の) 松原周波数および 30–60 個のフーリエ成分が必要であった。

超流動転移が、もし T 行列の発散に伴う 2 次相転移だとすると、 χ_{SC} の最大固有値 Λ_{Max} は転移点において下から 0 に到達するはずである。ただし、 P を変化させるときの、トラップされた有限サイズの系での正常状態からトラップの中央に超流動体が存在する状態への転移は、必ずしも相関長の発散を必要としない。1 次転移が起きる可能性もある。その場合にも、全粒子数 N と温度 T が同程度であれば、トラップの形状によらず Λ_{Max} が 0 に近い同じような値のところで転移が起きると仮定して、 μ_{\uparrow} と T を一定に保ちながら Λ_{Max} を μ_{\downarrow} を変えて計算し、比較した。

P_{CC} は、本来 $T = 0$ でも凝縮しなくなる P の値と定義すべきであるが、RSTA は有限温度に限定される。ただ、実験も ($T \lesssim 0.1T_F$ という低温での正確な温度の決定は困難であるが) 有限温度で行われており、有限温度での Λ_{Max} の振舞を調べることは有用である。

図 4 に示したように、 $\lambda = 12$ のとき、 Λ_{Max} の値は $\lambda = 1$ の場合に近いがやや小さく、0 から離れている。トラップが細長くなることによって、インバランス系の凝縮はむしろ抑制されている。なお、BdG の場合ほど μ_{\uparrow} を大きくできず、粒子数が増やせないため、比較は Rice 実験より小さな λ の値について行った。トラップの形状の効果は N が小さいほど強められ、小さな λ で現れると考えられる。Rice 実験の条件 ($N \gg 10^4$, $\lambda = 50$) でも、平衡状態での P_{CC} の値は λ がより 1 に近い場合と大きく変わらず、特に、1 に近いところまで増加することはないと考えられる。

¹⁵ 超流動相がある条件では、 $T > T_c$ 。

2.4 3次元トラップに対する結果のまとめ

以上、軸対称なトラップポテンシャル中における粒子数インバランスのある2成分フェルミオン原子系の超流動について、BdG 方程式を解くことおよび、RSTA を適用することにより行った研究の結果を説明した。インバランスに対応する結合定数の正規化を施し、正常状態での相互作用を考慮したときの BdG 方程式の解は、MIT の実験結果を再現するが、Rice の結果は再現しない。すなわち、Rice の実験のトラップ形状でも、平衡状態においては、原子分布の等ポテンシャル面からの変形は実験結果よりも小さく、CC limit P_{CC} の値は MIT の実験と同程度と期待される。RSTA による計算でも、CC limit は細長いトラップの効果として増大しないことが示された。

2.4.1 最近の実験との対応

上述のように、ENS の Nascimbène ら [21] は、さまざまな λ をもつトラップに、Rice 実験と同程度の個数の、粒子数インバランスのある2成分フェルミオン原子系を閉じ込め、 $P_{CC} = 0.76(3)$ を得た。また、LDA の大きな破れは観測されなかった。

Rice の実験で平衡に達するまでにスピンの拡散すべき典型的な距離をトラップの典型的な大きさから $300 \mu\text{m}$ とすると、MIT の Zwierlein らの実験 [128] で得られた、スピン拡散係数がユニタリティー極限でとる極小値 $D \simeq \hbar/m$ は、この距離を緩和するのに 1 s 程度以上かかることに対応する。これは Rice の実験での蒸発冷却時間より長い。実際、ENS の実験では、磁場を Feshbach 共鳴点に近づけながら 6 s 程度かけて蒸発冷却を進めて、上記の結果を得ているとのことである。

このことから、Rice の実験で $P > 0.8$ の領域においても見られる凝縮体は、遅い緩和過程での過渡的なものと推測される。アスペクト比の大きいトラップで、このような凝縮体が非平衡状態として見られる機構は [72, 73, 74, 82] で提案されている。今後、原子集団の初期状態やトラップの形状を制御する実験が進み、成分ごとの運動量分布を含むさまざまな量が観測されれば、非平衡状態のダイナミクスがより詳細に理解されるものと期待される。

最近では、光学的に [138] あるいは Feshbach 共鳴を利用して [139] 極低温の分子集団を生成する実験も行われている。これまでに量子縮退が実現された分子は、いずれも同種のフェルミオン原子の2原子分子であったが、今後は大きなダイポールモーメントを持つ異原子分子の実験の発展も期待される。ボソン原子系のスピノール BEC やダイポール BEC では多様な相や励起のダイナミクスが実現される [140]。2成分フェルミオン分子系でダイポール相互作用等、長距離の相互作用があるときの凝縮相が実現できれば、短距離相互作用であるフェルミオン原子系とは違った物理が期待でき、このような系は、クーロン相互作用する固体中の電子系との関連でも興味深い。

3 まとめ

2005 年末の2つのグループによる凝縮体の生成実験以来注目を集めてきた、粒子数インバランスのあるフェルミオン系におけるユニタリティー極限近傍での超流動について、実験研究の経緯

を紹介した。次いで、これまでに空間的に均一な系について、また、トラップの効果を考慮して、行われてきた理論研究のレビューを行い、質量インバランスのある系や1次元系に関する最近の発展についても説明した。そして、著者らが行った理論研究について述べた。これは、正常相の相互作用を取り込んだ BdG 方程式による数万粒子までの系に対する計算および、空間的に非均一な系で多体効果を扱える RSTA による unitarity 極限に対する計算によって、MIT グループの実験と異なり、トラップのアスペクト比の大きい Rice グループの実験の結果は平衡状態としては説明できないことを示した研究である。トラップのアスペクト比が大きい系で非平衡状態が生成している可能性については理論的に指摘されていたが、最近の実験からも、Rice の実験で緩和が完了していない可能性が示唆されることについても説明した。

謝辞

本稿で紹介した研究 [130] は柳瀬陽一氏 (新潟大学) および上田正仁氏 (東京大学) との共同研究であり、科学研究費補助金 (19・3598, 17071005, 22340114) の助成を受けたものです。本研究の主な部分は、著者が日本学術振興会特別研究員-PD として東京工業大学・東京大学において上田正仁教授のグループに在籍していた間に行われました。数値計算の一部で、東京大学物性研究所のスーパーコンピュータを利用しました。

本研究を進めるにあたり、Leslie Baksmaty 氏 (Rice 大学), Aurel Bulgac 氏 (Washington 大学), Masudul Haque 氏 (MPI-Dresden), Randy Hulet 氏 (Rice 大学), 池田隆介氏 (京都大学), Carlos Lobo 氏 (Cambridge 大学), 水島健氏 (岡山大学), 向山敬氏 (電気通信大学), Sandro Stringari 氏 (Trento 大学), Michael Urban 氏 (パリ南大学), Martin Zwierlein 氏 (MIT) をはじめとする方々に有益なご助言をいただきました。柳瀬陽一氏には本稿の執筆の機会をいただき、本稿の作成にあたって多大な助言をいただきました。

ここに感謝いたします。

参考文献

- [1] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, and E. Cornell: Science **269** (1995) 198.
- [2] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 1687; C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 1170; C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. A **55** (1997), 3951; C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 985.
- [3] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3969.
- [4] A. J. Leggett: Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 307.
- [5] E. A. Cornell and C. E. Wieman: Rev. Mod. Phys. **74** (2002) 875.
- [6] W. Ketterle: Rev. Mod. Phys. **74** (2002) 1131.
- [7] C. J. Pethick and H. Smith: *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases, 2nd ed.* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008)

- [8] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger: *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 885.
- [9] A. Griffin, T. Nikuni, and E. Zaremba: *Bose-Condensed Gases at Finite Temperatures* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- [10] M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin: *Nature* **426** (2003) 537.
- [11] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin: *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 040403.
- [12] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle: *Science* **292** (2001) 476.
- [13] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle: *Nature* **435** (2005) 1047.
- [14] M. W. Zwierlein, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle: *Science* **311** (2006) 492.
- [15] Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle: *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 030401.
- [16] M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle: *Nature* **442** (2006) 54.
- [17] G. B. Partridge, W. Li, R. I. Kamar, Y.-a. Liao, and R. G. Hulet: *Science* **311** (2006) 503.
- [18] G. B. Partridge, W. Li, Y. A. Liao, R. G. Hulet, M. Haque, and H. T. C. Stoof: *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 190407.
- [19] W. Li, G. B. Partridge, Y. A. Liao, and R. G. Hulet: *Nucl. Phys. A* **790** (2007) 88.
- [20] G. B. Partridge, W. Li, Y. A. Liao, and R. G. Hulet: *J. Low Temp. Phys.* **148** (2007) 323.
- [21] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, L. Tarruell, M. Teichmann, J. McKeever, F. Chevy, and C. Salomon: *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 170402.
- [22] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon: *Nature* **463** (2010) 1057.
- [23] B. S. Chandrasekhar: *Appl. Phys. Lett.* **1** (1962) 7.
- [24] A. M. Clogston: *Phys. Rev. Lett.* **9** (1962) 266.
- [25] Y.-I. Shin, C. H. Schunck, A. Schirotzek, and W. Ketterle: *Nature* **451** (2008) 689.
- [26] C. Lobo, A. Recati, S. Giorgini, and S. Stringari: *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 200403.
- [27] A. Schirotzek, Y.-i. Shin, C. H. Schunck, and W. Ketterle: *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 140403.
- [28] A. Schirotzek, C.-H. Wu, A. Sommer, and M. W. Zwierlein: *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 230402.
- [29] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari: *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 1215.
- [30] A. Leggett: *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, ed. A. Pekalski and R. Przystawa (Springer-Verlag, Berlin, 1980) p. 13.
- [31] P. Nozières and S. Schmitt-Rink: *J. Low. Temp. Phys.* **59** (1985) 195.
- [32] A. Tokumitsu, K. Miyake, and K. Yamada: *Phys. Rev. B* **47** (1993) 11988.
- [33] Y. Ohashi and A. Griffin: *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 130402.
- [34] P. Nikolić and S. Sachdev: *Phys. Rev. A* **75** (2007) 033608.
- [35] T.-L. Ho: *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 090402.
- [36] A. Bulgac, J. E. Drut, and P. Magierski: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 090404.
- [37] E. Burovski, N. Prokof'ev, B. Svistunov, and M. Troyer: *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 160402.
- [38] R. Haussmann, W. Rantner, S. Cerrito, and W. Zwerger: *Phys. Rev. A* **75** (2007) 023610.
- [39] Y. Nishida and S. Tan: *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 170401.
- [40] Y. Nishida and D. Thanh Son: preprint, arXiv:1004.3597.
- [41] E. Helfand and N. R. Werthamer: *Phys. Rev.* **147** (1966) 288.

- [42] N. R. Werthamer, E. Helfand, and P. C. Hohenberg: Phys. Rev. **147** (1966) 295.
- [43] P. Fulde and R. A. Ferrell: Phys. Rev. **135** (1964) A550.
- [44] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** (1964) 1136.
- [45] G. Sarma: J. Phys. Chem. Solids **24** (1963) 1029.
- [46] W. V. Liu and F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 047002.
- [47] H. Müther and A. Sedrakian: Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 252503.
- [48] A. Sedrakian, J. Mur-Petit, A. Polls, and H. Müther: Phys. Rev. A **72** (2005) 013613.
- [49] K. Machida and H. Nakanishi: Phys. Rev. B **30** (1984) 122.
- [50] A. Bianchi, R. Movshovich, C. Capan, P. G. Pagliuso, and J. L. Sarrao: Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 187004.
- [51] H. Won, K. Maki, S. Haas, N. Oeschler, F. Weickert, and P. Gegenwart: Phys. Rev. B **69** (2004) 180504.
- [52] T. Watanabe, Y. Kasahara, K. Izawa, T. Sakakibara, Y. Matsuda, C. J. van der Beek, T. Hanaguri, H. Shishido, R. Settai, and Y. Onuki: Phys. Rev. B **70** (2004) 020506.
- [53] S. Yonezawa, S. Kusaba, Y. Maeno, P. Auban-Senzier, C. Pasquier, and D. Jérôme: J. Phys. Soc. Jpn. **77** (2008) 054712.
- [54] S. Uji, T. Terashima, M. Nishimura, Y. Takahide, T. Konoike, K. Enomoto, H. Cui, H. Kobayashi, A. Kobayashi, H. Tanaka, M. Tokumoto, E. S. Choi, T. Tokumoto, D. Graf, and J. S. Brooks: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 157001.
- [55] K. Gloos, R. Modler, H. Schimanski, C. D. Bredl, C. Geibel, F. Steglich, A. I. Buzdin, N. Sato, and T. Komatsubara: Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 501.
- [56] W. E. Pickett, R. Weht, and A. B. Shick: Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3713.
- [57] H. Shimahara and S. Hata: Phys. Rev. B **62** (2000) 14541.
- [58] Y. Kanegae and Y. Ohashi: J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 2124.
- [59] J. Singleton, J. A. Symington, M.-S. Nam, A. Ardavan, M. Kurmoo, and P. Day: J. Phys.: Condens. Matter **12** (2000) L641.
- [60] R. Combescot: Europhys. Lett. **55** (2001) 150.
- [61] T. Mizushima, K. Machida, and M. Ichioka: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 060404.
- [62] J. Carlson and S. Reddy: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 060401.
- [63] T. D. Cohen: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 120403.
- [64] D. E. Sheehy and L. Radzihovsky: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 060401.
- [65] D. E. Sheehy and L. Radzihovsky: Ann. Phys. **322** (2007) 1790.
- [66] K. B. Gubbels, M. W. J. Romans, and H. T. C. Stoof: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 210402.
- [67] M. M. Parish, F. M. Marchetti, A. Lamacraft, and B. D. Simons: Nature Phys. **3** (2007) 124.
- [68] K. B. Gubbels and H. T. C. Stoof: Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 140407.
- [69] M. Haque and H. T. C. Stoof: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 260406.
- [70] T. N. De Silva and E. J. Mueller: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 070402.
- [71] H. Caldas: J. Stat. Mech.: Theory Exp. **2007** (2007) P11012.
- [72] B. Van Schaeybroeck and A. Lazarides: Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 170402.
- [73] B. Van Schaeybroeck and A. Lazarides: Phys. Rev. A **79** (2009) 053612.

- [74] M. M. Parish and D. A. Huse: Phys. Rev. A **80** (2009) 063605.
- [75] P. Castorina, M. Grasso, M. Oertel, M. Urban, and D. Zappalà: Phys. Rev. A **72** (2005) 025601.
- [76] J. Kinnunen, L. M. Jensen, and P. Törmä: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 110403.
- [77] K. Machida, T. Mizushima, and M. Ichioka: Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 120407.
- [78] L. M. Jensen, J. Kinnunen, and P. Törmä: Phys. Rev. A **76** (2007) 033620.
- [79] X.-J. Liu, H. Hu, and P. D. Drummond: Phys. Rev. A **75** (2007) 023614.
- [80] R. Sensarma, W. Schneider, R. B. Diener, and M. Randeria: preprint, arXiv:0706.1741v1.
- [81] J. M. Diederix, K. B. Gubbels, and H. T. C. Stoof: preprint, arXiv:0907.0127.
- [82] L. O. Baksmaty, H. Lu, C. J. Bolech, and H. Pu: preprint, arXiv:1003.4488v1.
- [83] Y. Yanase: Phys. Rev. B **80** (2009) 220510.
- [84] B. Wang, H. Chen, and S. Das Sarma: Phys. Rev. A **79** (2009) 051604.
- [85] H. Guo, C. Chien, Q. Chen, Y. He, and K. Levin: Phys. Rev. A **80** (2009) 011601.
- [86] G. G. Batrouni, M. J. Wolak, F. Hébert, and V. G. Rousseau: Europhys. Lett. **86** (2009) 47006.
- [87] P. F. Bedaque, H. Caldas, and G. Rupak: Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 247002.
- [88] M. M. Forbes, E. Gubankova, W. V. Liu, and F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 017001.
- [89] G. J. Conduit, P. H. Conlon, and B. D. Simons: Phys. Rev. A **77** (2008) 053617.
- [90] K. B. Gubbels, J. E. Baarsma, and H. T. C. Stoof: Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 195301.
- [91] J. E. Baarsma, K. B. Gubbels, and H. T. C. Stoof: Phys. Rev. A **82** (2010) 013624.
- [92] E. W. Carlson, D. Orgad, S. A. Kivelson, and V. J. Emery: Phys. Rev. B **62** (2000) 3422.
- [93] K. Yang: Phys. Rev. B **63** (2001) 140511.
- [94] M. Tezuka and M. Ueda: Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 110403.
- [95] M. Tezuka and M. Ueda: New J. Phys. **12** (2010) 055029.
- [96] S. H. Abedinpour, M. R. Bakhtiari, G. Xianlong, M. Polini, M. Rizzi, and M. P. Tosi: Laser Phys. **17** (2007) 162.
- [97] A. E. Feiguin and F. Heidrich-Meisner: Phys. Rev. B **76** (2007) 220508(R).
- [98] M. Rizzi, M. Polini, M. A. Cazalilla, M. R. Bakhtiari, M. P. Tosi, and R. Fazio: Phys. Rev. B **77** (2008) 245105.
- [99] M. Machida, S. Yamada, M. Okumura, Y. Ohashi, and H. Matsumoto: Phys. Rev. A **77** (2008) 053614.
- [100] A. Lüscher, R. M. Noack, and A. M. Läuchli: Phys. Rev. A **78** (2008) 013637.
- [101] M. Machida, M. Okumura, S. Yamada, T. Deguchi, Y. Ohashi, and H. Matsumoto: Phys. Rev. B **78** (2008) 235117.
- [102] F. Heidrich-Meisner, A. E. Feiguin, U. Schollwöck, and W. Zwerger: Phys. Rev. A **81** (2010) 023629.
- [103] F. Heidrich-Meisner, G. Orso, and A. E. Feiguin: Phys. Rev. A **81** (2010) 053602.
- [104] M. R. Bakhtiari, M. J. Leskinen, and P. Törmä: Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 120404.
- [105] X. Liu, H. Hu, and P. D. Drummond: Phys. Rev. A **78** (2008) 023601.
- [106] G. G. Batrouni, M. H. Huntley, V. G. Rousseau, and R. T. Scalettar: Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 116405.
- [107] M. Casula, D. M. Ceperley, and E. J. Mueller: Phys. Rev. A **78** (2008) 033607.

- [108] T. Roscilde, M. Rodríguez, K. Eckert, O. Romero-Isart, M. Lewenstein, E. Polzik, and A. Sanpera: *New J. Phys.* **11** (2009) 055041.
- [109] M. Gaudin: *Phys. Lett. A* **24** (1967) 55.
- [110] C. N. Yang: *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1312.
- [111] I. Shimose and Y. Akiyoshi: *Bussei Kenkyu* **20** (1973) 267.
- [112] R. J. Magyar and K. Burke: *Phys. Rev. A* **70** (2004) 032508.
- [113] T. Iida and M. Wadati: *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2007** (2007) P06011.
- [114] G. Orso: *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070402.
- [115] H. Hu, X.-J. Liu, and P. D. Drummond: *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070403.
- [116] G. Xianlong and R. Asgari: *Phys. Rev. A* **77** (2008) 033604.
- [117] P. Kakashvili and C. J. Bolech: *Phys. Rev. A* **79** (2009) 041603.
- [118] E. Zhao and W. V. Liu: *J. Low Temp. Phys.* **158** (2009) 63.
- [119] S. H. Abedinpour, M. Polini, G. Xianlong, and M. P. Tosi: *Phys. Rev. A* **75** (2007) 015602.
- [120] S. K. Baur, J. Shumway, and E. J. Mueller: *Phys. Rev. A* **81** (2010) 033628.
- [121] W. V. Liu, F. Wilczek, and P. Zoller: *Phys. Rev. A* **70** (2004) 033603.
- [122] A. Chen and G. Xianlong: *Phys. Rev. A* **81** (2010) 013628.
- [123] B. Wang and L. Duan: *Phys. Rev. A* **79** (2009) 043612.
- [124] A. E. Feiguin and F. Heidrich-Meisner: *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 076403.
- [125] M. Iskin and C. J. Williams: *Phys. Rev. A* **78** (2008) 011603.
- [126] Y. Nishida and S. Tan: *Phys. Rev. A* **79** (2009) 060701.
- [127] T. Esslinger: *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1** (2010) 129.
- [128] A. Sommer, A. Schirotzek, M. Ku, and M. Zwierlein, unpublished.
- [129] Y. Liao, A. S. C. Rittner, T. Paprotta, W. Li, G. B. Partridge, R. G. Hulet, S. K. Baur, and E. J. Mueller: preprint, arXiv:0912.0092.
- [130] M. Tezuka, Y. Yanase, and M. Ueda: preprint, arXiv:0811.1650v3.
- [131] P. Pieri and G. C. Strinati: *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 030401.
- [132] H. Heiselberg: *New J. Phys.* **6** (2004) 137.
- [133] A. Bulgac and Y. Yu: *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 042504.
- [134] M. Grasso and M. Urban: *Phys. Rev. A* **68** (2003) 033610.
- [135] Y. Yanase: *J. Phys. Soc. Jpn.* **73** (2004) 1000.
- [136] Y. Yanase: *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** (2006) 124715.
- [137] Y. Yanase and N. Yoroizu: *J. Phys. Soc. Jpn.* **78** (2009) 043715.
- [138] K. M. Jones, E. Tiesinga, P. D. Lett, and P. S. Julienne: *Rev. Mod. Phys.* **78** (2006) 483.
- [139] T. Köhler, K. Góral, and P. S. Julienne: *Rev. Mod. Phys.* **78** (2006) 1311.
- [140] M. Ueda and Y. Kawaguchi: preprint, arXiv:1001.2072.